Bienvenue !

Visiter

"Physique Fine enjah "

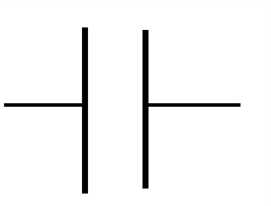
sur youtube

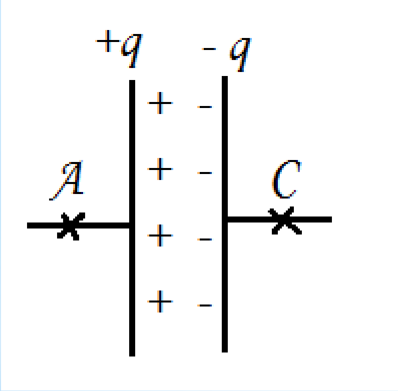
Pour plus comprendre le cours

Chapitre : 2 Charge et décharge d’un condensateur

- **Condensateur :** Accumulateur de charge permet d’emmagasiner *l’énérgie* , *formé par deux conducteurs séparées d’une petite* distance d , par un isolant : *l’aire* , diéléctrique …

✓ Symbole :





- *Caractéristiques :*

✓ *Capacité : C en farad (F) (toujours positif)*
✓ *Charge : Q en coulomb (C)*
✓ *Tension $U_{AC} = U_C$ en volt (V)*

- *Relations :*

$$Q = C \times U_{AC}$$
$$+q = C \times U_{AC}$$
$$-q = C \times U_{CA}$$
$$Q = +q = |-q|$$

- <u>Energie éléctrique :</u> $E_e = \frac{1}{2}\ C\ {U_C}^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q U_C$

- <u>Remarque :</u>

- *Courant positif sort de la borne positif du générateur (ce qu'on utilise dans ce cours)*
- *Courant négatif sort de la borne négatif du générateur*

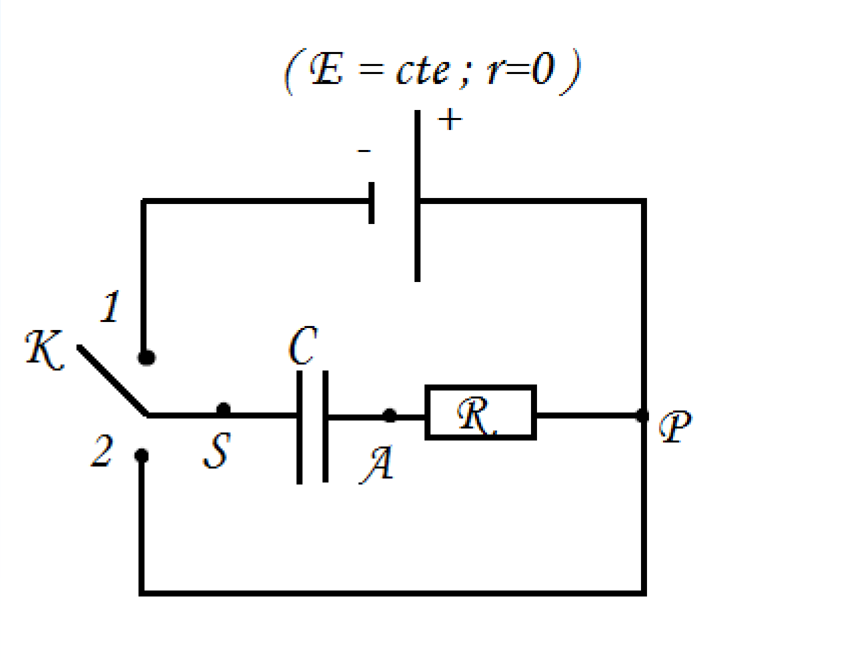
- *La résistance interne du générateur est un résistance monté en série avec le générateur , la plupart des fois on ne le dessine pas , il représente la perte .*

- *Si la résistance interne du générateur est négligeable , on dit que le générateur est idéale .*

- ***Charge d'un condensateur :***

- ***Circuit générale:***

Le circuit est formé d'un générateur de force éléctromotrice E constante et de résistance interne négligeable , un conducteur ohmique de résistance R , un interrupteur K (2 positions 1 et 2) , un condensateur de capacité C initialement neutre et des fils de connexions .

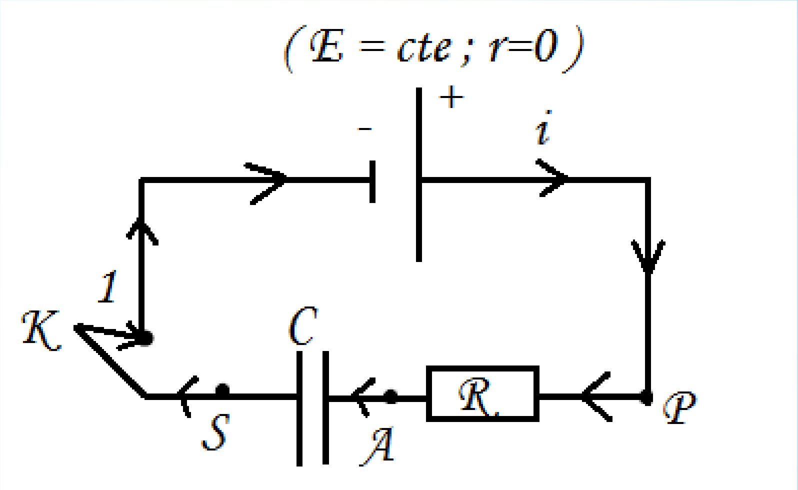


- ***Charge :***

Conditions initiale à $t_0 = 0$ *, on a :* $\begin{cases} Q = 0 \\ U_C = 0 \\ E_e = 0 \end{cases}$

➢ *À l'instant* $t_0 = 0$ *, l'interrupteur est fermé à la position 1 , le condensateur commence à ce charger .*

✓ *Le circuit est alors équivalente à :*



❑ *Loi d'additivité :*

$$U_g = U_R + U_C$$

$$-ir + E = iR + U_C$$

$$E = iR + U_C$$

➢ *Equation différentielle :* (Mot – clé) : *Idée est appliquée la loi d'additivité*

➢ *Montrer que* $i = +C\frac{dU_C}{dt}$

✓ *On a charge , alors* $q \uparrow$ *, donc* $\frac{dq}{dt} > 0$ *et* $i > 0$

donc : $i = +\frac{dq}{dt}$ *, mais* $q = C \times U_C$ *, alors* $i = +C\frac{dU_C}{dt}$

1. <u>Equation en U_C</u> :

$$E = iR + U_C = RC\frac{dU_C}{dt} + U_C$$

$$Donc : \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R\,C} = \frac{E}{RC}$$

2. <u>Equation en q :</u>

$$E = iR + U_C = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$Donc : \frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = \frac{E}{R}$$

3. <u>Equation en i</u> :

$$E = iR + U_C\,, alors : R\frac{di}{dt} + \frac{dU_C}{dt} = 0$$

$$Donc : \frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$$

➢ <u>*Les solutions :*</u>

1. *Vérifier que* $U_C = E(\,1 - e^{-\frac{t}{RC}}\,)$ *est une solution .*

On a : $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R\,C} = \frac{E}{R\,C}$ *est l'équation différentielle .*

$$(e^U)' = U'e^U$$

$$U_C = E\left(\,1 - e^{-\frac{t}{RC}}\,\right) = E - E e^{-\frac{t}{R\,C}}$$

$$\frac{dU_C}{dt} = 0 - E\left(-\frac{1}{R\,C}\right)e^{-\frac{t}{R\,C}} = \frac{E}{R\,C}e^{-\frac{t}{R\,C}}$$

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R\,C} = \frac{E}{R\,C}e^{-\frac{t}{R\,C}} + \frac{E}{R\,C} - \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{R\,C}} = \frac{E}{R\,C}$$

Alors : $U_C = E(\,1 - e^{-\frac{t}{RC}}\,)$ *est une solution . C.q.f.d*

2. *La solution de cette équation différentielle est* $U_C = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. *Détérminer* A *et* τ .

- ✓ *On a* $U_C = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = A - Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ *est une solution*

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R\,C} = \frac{E}{R\,C}$$

$$\frac{dU_C}{dt} = 0 - A\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$Donc : \frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{A}{RC} - \frac{A}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R\,C}$$

$$Donc : \frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{A}{RC} = \frac{E}{R\,C} + \frac{A}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Par identification : $\frac{A}{\tau} = \frac{A}{R\,C}$ *, alors :* $\tau = R\,C$

Et $\frac{A}{R\,C} = \frac{E}{R\,C}$ *, donc :* $A = E$ *, alors* $U_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{R\,C}}\right)$

3. La solution de cette équation différentielle est : $U_C = a + be^{\alpha\, t}$. Détérminer a , b et α .

✓ On a : $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R\,C} = \frac{E}{R\,C}$

Et , $U_C = a + be^{\alpha t}$, donc : $\frac{dU_C}{dt} = 0 + \alpha\, be^{\alpha\, t} = \alpha\, b\, e^{\alpha\, t}$

Alors : $\alpha\, b\, e^{\alpha\, t} + \frac{a}{R\,C} + \frac{b}{R\,C} e^{\alpha\, t} = \frac{E}{R\,C}$

Donc : $\alpha\, b\, e^{\alpha\, t} + \frac{a}{R\,C} = \frac{E}{R\,C} - \frac{b}{R\,C} e^{\alpha\, t}$

<u>Par identification</u> : $\frac{a}{R\,C} = \frac{E}{R\,C}$, donc : $a = E$.

Et $\alpha b = -\frac{b}{R\,C}$, donc : $\alpha = -\frac{1}{R\,C}$

<u>Condition initiale</u> , à $t_0 = 0$, $U_C = 0$, alors : $0 = a + b$, donc $a = -b = E$

Parsuite : $U_C = E - E\,e^{-\frac{t}{R\,C}} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{R\,C}}\right)$.

- ***Remarque :***

Les différentes solutions des équations différentielles sont :

$$\begin{cases} U_C = E(1 - e^{-\frac{t}{R\,C}}) \\ q = CE(1 - e^{-\frac{t}{R\,C}}) \\ i = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{t}{R\,C}} \end{cases}$$

Nom du phénomène physique déjà étudiée : Charge du condensateur .

➢ *Pour trouver i si on a* $U_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$:

$$Charge\ , donc : i = +C\frac{dU_C}{dt}$$

$$Et\ U_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow i = C\left(0 - E\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$Donc : i = C\left(\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right) \Rightarrow i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

- Pour trouver U_C si on a $i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$:

$$Charge\ , donc : i = +C \frac{dU_C}{dt}$$

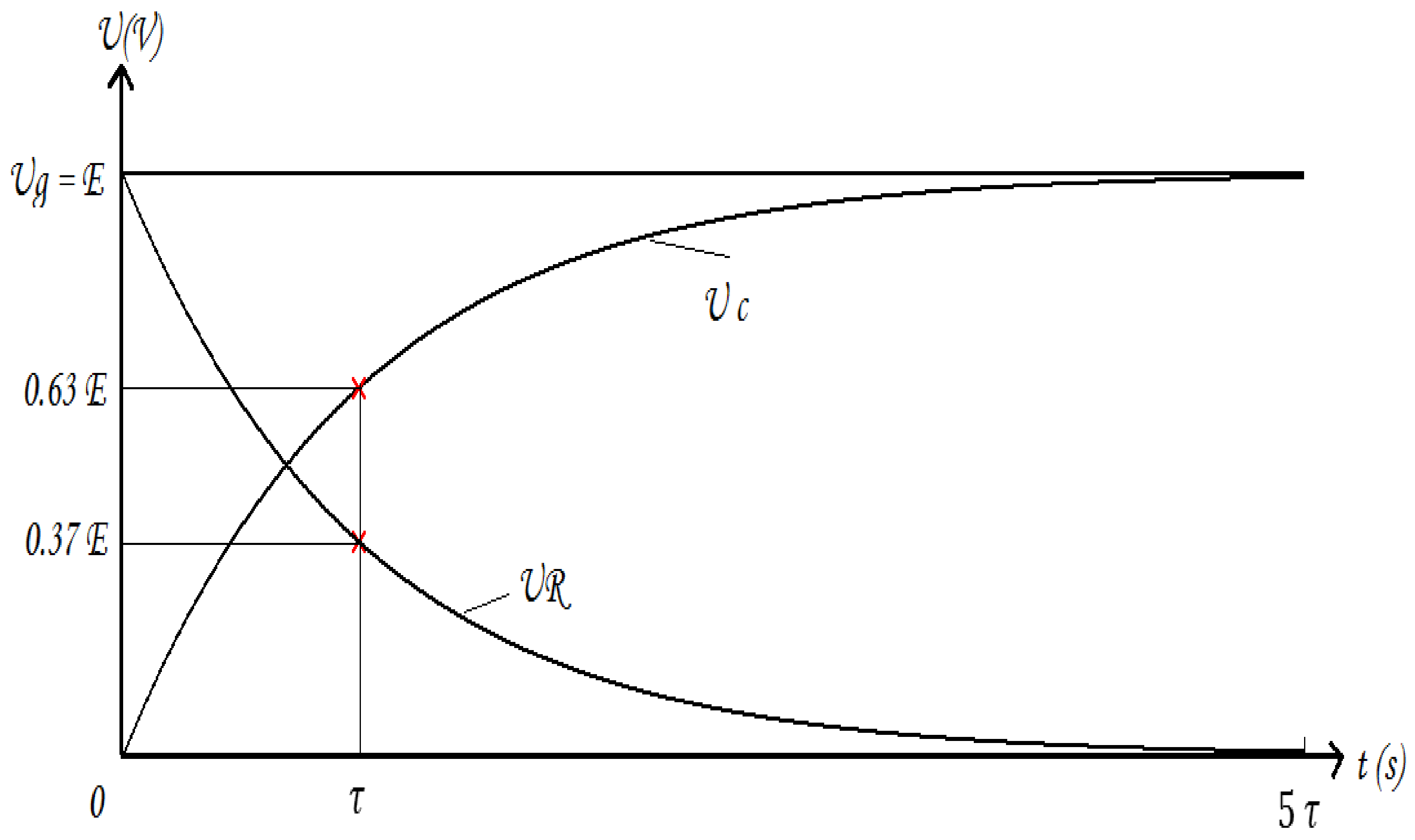
Alors : $\frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C} i \Rightarrow dU_C = \frac{1}{C} i\ dt \Rightarrow U_C = \frac{1}{C} \int i\ \ dt = \frac{1}{C} \int \left(\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{Rc}} \right) dt\ = \frac{E}{RC} \int e^{-\frac{t}{RC}} dt$

Donc : $U_C = \frac{E}{R\ C} (-RC) e^{-\frac{t}{RC}} = -Ee^{-\frac{t}{RC}} + c$,

à $t_0 = 0 \Rightarrow U_C = 0 \Rightarrow E = c$

Alors : $U_C = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow U_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$.

➢ *Graphes :*



$$U_g = U_R + U_C \Rightarrow U_R = E - U_C$$

$$U_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{R\,C}}\right), donc : \; U_R = E - \left(E - Ee^{-\frac{t}{R\,C}}\right) = Ee^{-\frac{t}{R\,C}}$$

$$\text{à } t_0 = 0 \;, U_C = E(1 - e^0) = E(1 - 1) = 0$$

$$\text{à } t = \tau = R\,C \,, U_C = E\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = E(1 - e^{-1}) = 0.63\,E$$

$$\text{à } t = 5\tau = 5RC \,, U_C = E\left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) = E(1 - e^{-5}) = E(1 - 0) = E$$

Et d'autre part : à $t_0 = 0 \,, U_R = E - 0 = E$

$$\text{à } t = \tau \,, U_R = E - 0.63E = 0.37\,E$$

$$\text{à } t = 5\tau \,, U_R = E - E = 0$$

- $\tau = R\,C$ est le temps nécéssaire pour que le condensateur soit 63 % chargé de la valeur maximal du générateur .
- $5\,\tau = 5\,R\,C$ est le temps nécéssaire pour que le condensateur soit complétement chargé par rapport à la générateur utilisé .
- La tangente à l'origine du temps $t_0 = 0$ à la courbe de U_C , coupe la droite asymptote $U = E$ au point d'abscisse τ .

- L'intersection des deux courbes : $U_C = U_R = \frac{E}{2}$, donc :

$$E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$donc : E - Ee^{-\frac{t}{\tau}} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$Alors : 2Ee^{-\frac{t}{\tau}} = E$$

$$Donc : \ e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}$$

Alors : $-\frac{t}{\tau} = -ln2 \Rightarrow t = \tau\,ln2 \Rightarrow t = RC\,ln2$.

- Monter que la tangente à l'origine du temps (à $t_0 = 0$) à la courbe $U_C(t)$ coupe l'asymptote $U = E$ en un point M d'abscisse τ .

- ✓ <u>Sol:</u> Soit $M(t_M\,;E)$. On a la pente de la tangente à l'origine du temps à la courbe $U_C(t)$ est définie par la dérivée : $\frac{dU_C}{dt}$ (pour $t = 0$)

$$U_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}, pour\ (t = 0) \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{\tau}$$

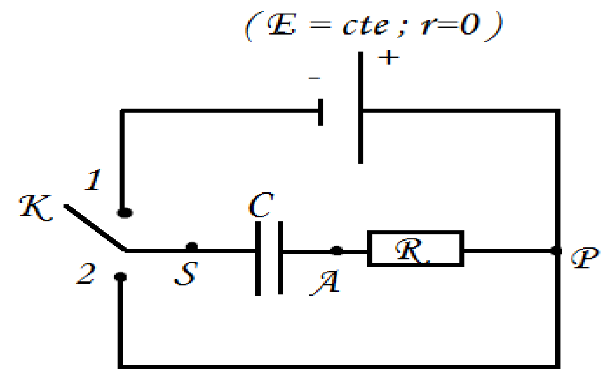
D'autre part , la pente de la tangente à l'origine du temps , qui coupe la droite $(U = E)$ au point M est définie par : $pente = \frac{U_{(M)} - U_{(0)}}{t_M - t_0} = \frac{E - 0}{t_M - 0} = \frac{E}{t_M}$

$$Pente = Pente \Rightarrow \frac{E}{\tau} = \frac{E}{t_M} \Rightarrow t_M = \tau\ . \qquad C.q.f.d$$

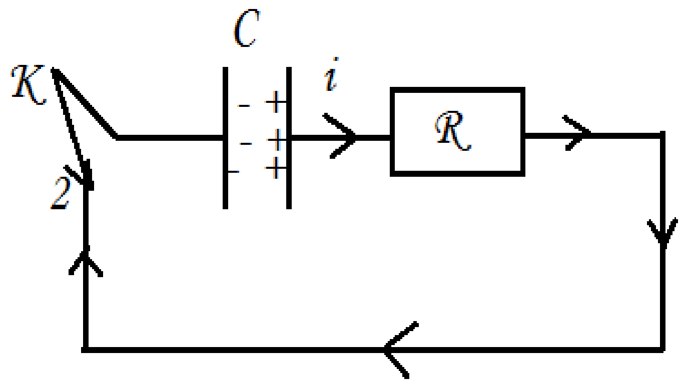
- Physiquement , on suppose que à $t = 5\,\tau$ on a $U_C = E$, et on ne considère pas $(U = E)$comme asymptote à la courbe dans la figure .

➢ *Décharge d'un condensateur :*

À un nouveau date $t_0 = 0$, le condensateur est complétement chargé , l'interrupteur est dans la position 2 , le condensateur commence a ce décharger .



✓ *Le circuit est équivalent à :*



Le courant positif sort de la plaque positif du condensateur , dans ce cas , c'est le sens inverse du sens utilisé dans le cas de la charge , alors i circule de A vers P vers S .

➢ *Conditions initiale :* $\begin{cases} U_C = E \\ Q = C \times U_C = C \times E \\ E_e = \frac{1}{2} C {U_C}^2 = \frac{1}{2} C E^2 \end{cases}$

- *Monter que :* $i = -C\frac{dU_C}{dt}$.

✓ *Décharge : q diminue , alors* $\frac{dq}{dt} < 0$ *, mais* $i > 0$ *, alors :* $i = -\frac{dq}{dt}$

Or , $q = C \times U_C$ *, alors :* $i = -\frac{d(C\times U_C)}{dt} \Rightarrow i = -C\frac{dU_C}{dt}$.

- *<u>Loi d'additivité et équations différentielles :</u>*

Dans le cas de décharge du condensateur dans le circuit considérée , on a :

$$U_{AS} + U_{SA} = 0 \Rightarrow U_R - U_C = 0 \Rightarrow U_C = U_R$$

Alors : $U_C - iR = 0$ *, mais :* $i = -C\frac{dU_C}{dt}$ *, donc :*

$$U_C - \left(-C\frac{dU_C}{dt}\right)(R) = 0 \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R\,C} = 0$$

➢ *Pour q :*

$$U_C = U_R \Rightarrow U_C = Ri \Rightarrow \frac{q}{C} = R\left(-\frac{dq}{dt}\right)$$

Alors : $\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = 0$.

➢ *Pour i :*

$$U_C = U_R \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} = \frac{dU_R}{dt}$$

$$i = -C\frac{dU_C}{dt}\ , alors :\ \frac{dU_C}{dt} = -\frac{i}{C}$$

On obtient : $-\frac{i}{C} = R\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{R\,C} = 0$.

- *Les solutions :*

1. *Vérifier que* $q = C\,E\,e^{-\frac{t}{R\,C}}$.

- *Sol:* $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = 0\,??$

$$\frac{dq}{dt} = -CE\left(\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{R\,C}} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{R\,C}}$$

Donc : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{R\,C}} + \frac{C\,Ee^{-\frac{t}{R\,C}}}{R\,C} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{R\,C}} + \frac{Ee^{-\frac{t}{R\,C}}}{R} = 0$ *C.q.f.d*

2. *La solution de cette équation différentielle est :* $q = A\, e^{-\frac{t}{\tau}}$.

- *Détérminer* A *et* τ .

✓ <u>*Sol:*</u> $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R\,C} = 0$

Donc : $-\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{A}{R\,C} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \Rightarrow \frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{A}{R\,C} e^{-\frac{t}{\tau}}$

<u>*Par identification :*</u> $\frac{A}{\tau} = \frac{A}{R\,C} \Rightarrow \tau = R\,C$

<u>Condition initiale :</u> à $t_0 = 0 \Rightarrow q = CE \Rightarrow CE = Ae^0 = A \Rightarrow A = CE$

$$Donc : q = C\,E e^{-\frac{t}{R\,C}}$$

- ***Remarque :***

Dans le phénomène de décharge du condensateur selon une circuit (RC) , initialement admet une tension E continue :

$$\begin{cases} q = CEe^{-\frac{t}{RC}} \\ U_C = Ee^{-\frac{t}{RC}} \\ i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \end{cases}$$

Nom du phénomène : Décharge du condensateur .

- Pour trouver i si on a $q = C\,E e^{-\frac{t}{R\,C}}$:

Décharge , donc : $i = -\frac{dq}{dt} = -CE\left(-\frac{1}{R\,C}\right) e^{-\frac{t}{R\,C}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{R\,C}}$.

- Pour trouver q si on a $i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{R\,C}}$:

Décharge , donc : $i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = -i\,dt \Rightarrow q = -\int i\ dt = -\int \left(\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{R\,C}}\right) dt$

Alors : $q = -\frac{E}{R}\int e^{-\frac{t}{R\,C}}\,dt \Rightarrow q = -\frac{E}{R}(-RC)e^{-\frac{t}{R\,C}} = C\,E e^{-\frac{t}{R\,C}} + c$.

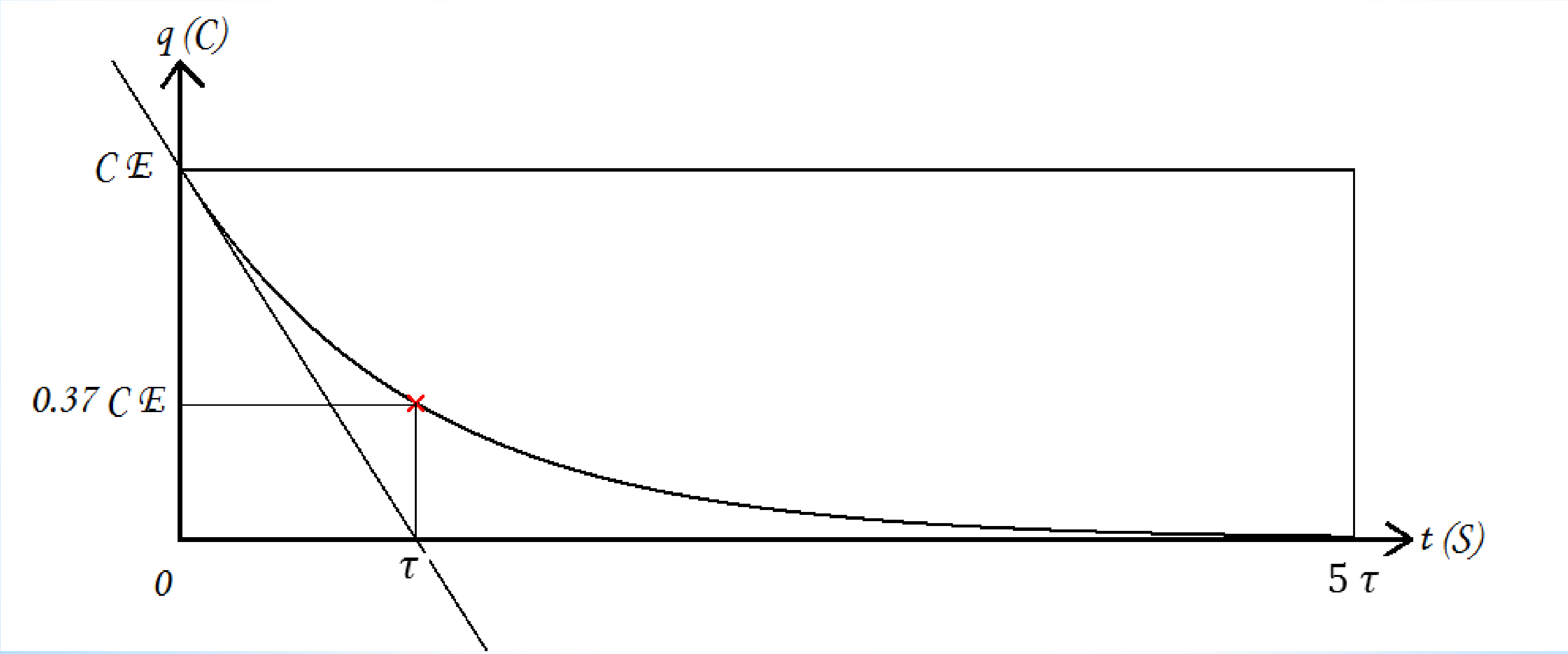
À $t_0 = 0 \Rightarrow q = C\,E \Rightarrow C\,E = C\,E e^{0} + c = C\,E + c \Rightarrow c = 0$

Alors : $q = C\,E e^{-\frac{t}{R\,C}}$.

- <u>*Graphes :*</u>

$$q = C\,E\,e^{-\frac{t}{R\,C}}$$

- $t_0 = 0 \Rightarrow q = C\,Ee^{0} = C\,E$
- $t = \tau = R\,C \Rightarrow q = C\,Ee^{-\frac{R\,C}{R\,C}} = C\,Ee^{-1} = 0.37\,C\,E$
- $t = 5\,\tau = 5\,R\,C \Rightarrow q = C\,Ee^{-\frac{5\,R\,C}{R\,C}} = C\,Ee^{-5} = 0$



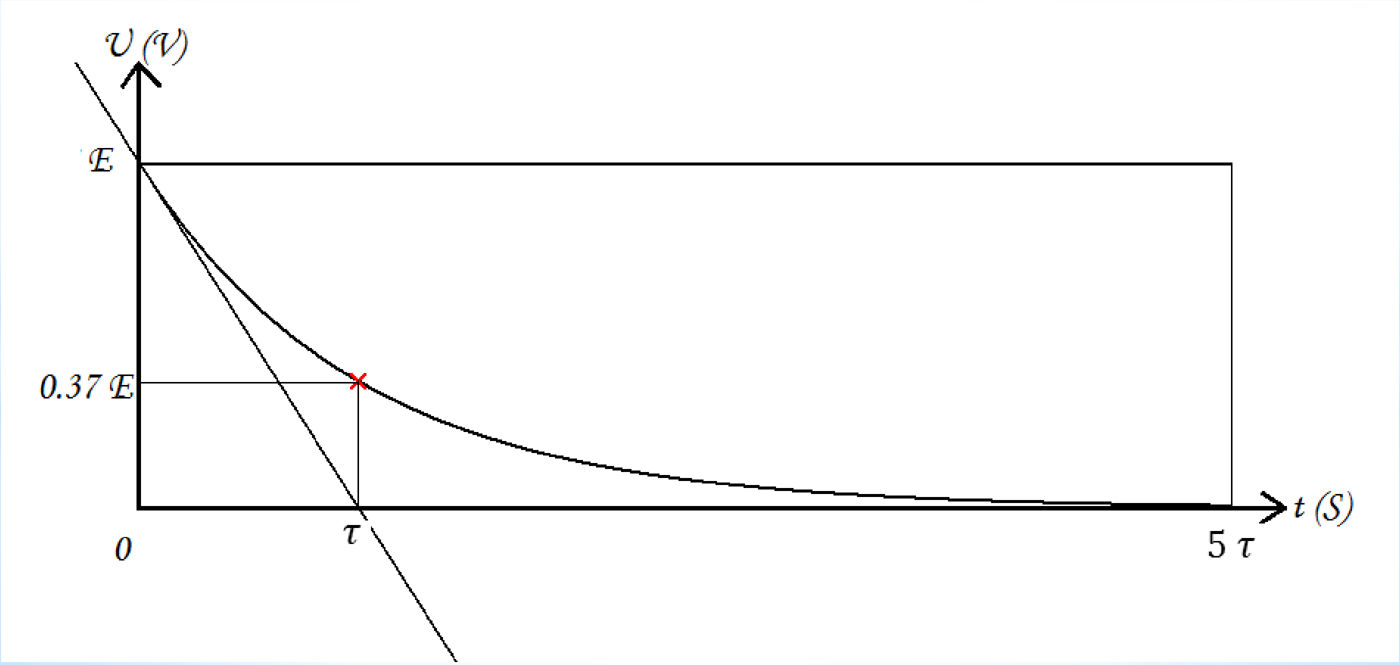
- $U_R = U_C = \frac{q}{C} \Rightarrow$ à $t_0 = 0$, $U_R = \frac{C\,E}{C} = E$

- à $t = \tau \Rightarrow U_R = 0.37\ E$

- À $t = 5\tau \Rightarrow U_R = 0$

- *La courbe de $U_R(t)$est le même que $U_C(t)$, car $U_C = U_R$.*

- *L'allure de $U_R(t) = U_C(t)$ est similaire à $q(t)$ car : $q = C \times U_C$.*



- $\tau = R\ C$ est le temps nécéssaire au bout duquel q devient 37 % de sa valeur initiale C E (q=0.37 CE)

- $5\ \tau = 5\ \ R\ C$ est le temps nécéssaire pour que q devient égal à zéro , c'est le temps au bout duquel le condensateur est complétement déchargé .

- *Monter que la tangente à l'origine du temps* (à $t_0 = 0$) *à la courbe* $q(t)$ *coupe l'asymptote* $q = 0$ *en un point M d'abscisse* τ .

✓ Sol: Soit $M(t_M\ ;0)$. *On a la pente de la tangente à l'origine du temps à la courbe* $q(t)$ *est définie par la dérivée :* $\frac{dq}{dt}$ (*pour* $t = 0$)

$$q = C\ E e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{C\ E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, pour\ (t = 0) \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{C\ E}{\tau}$$

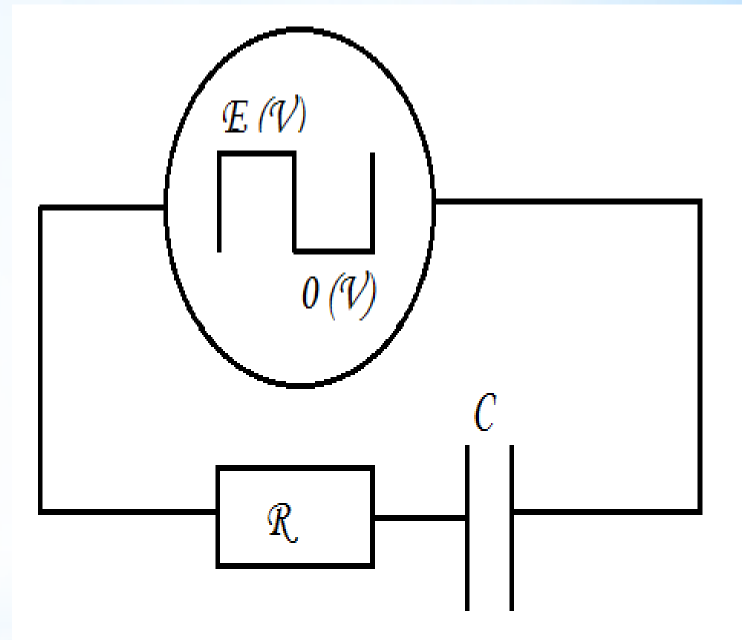
D'autre part , la pente de la tangente à l'origine du temps , qui coupe l'axe du temps au point M est définie par : $pente = \frac{q_M - q_0}{t_M - t_0} = \frac{0 - C\ E}{t_M - 0} = -\frac{C\ E}{t_M}$

$$Pente = Pente \Rightarrow -\frac{C\ E}{\tau} = -\frac{C\ E}{t_M} \Rightarrow t_M = \tau\ . \qquad C.q.f.d$$

- *Physiquement , on suppose que à* $t = 5\,\tau$ *on a* $U_C = 0$ *, et on ne considère pas l'axe du temps comme asymptote à la courbe dans la figure .*

➢ <u>*Charge et décharge d'un condensateur par un générateur signal carrée :*</u>

Le circuit est formé d'un générateur délivrant une tension de signal carrée , d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C initialement neutre .



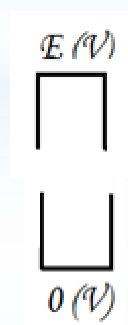
➢ <u>*Loi d'additivité et équations différentielles :*</u>

$$U_g = U_R + U_C = iR + U_C$$

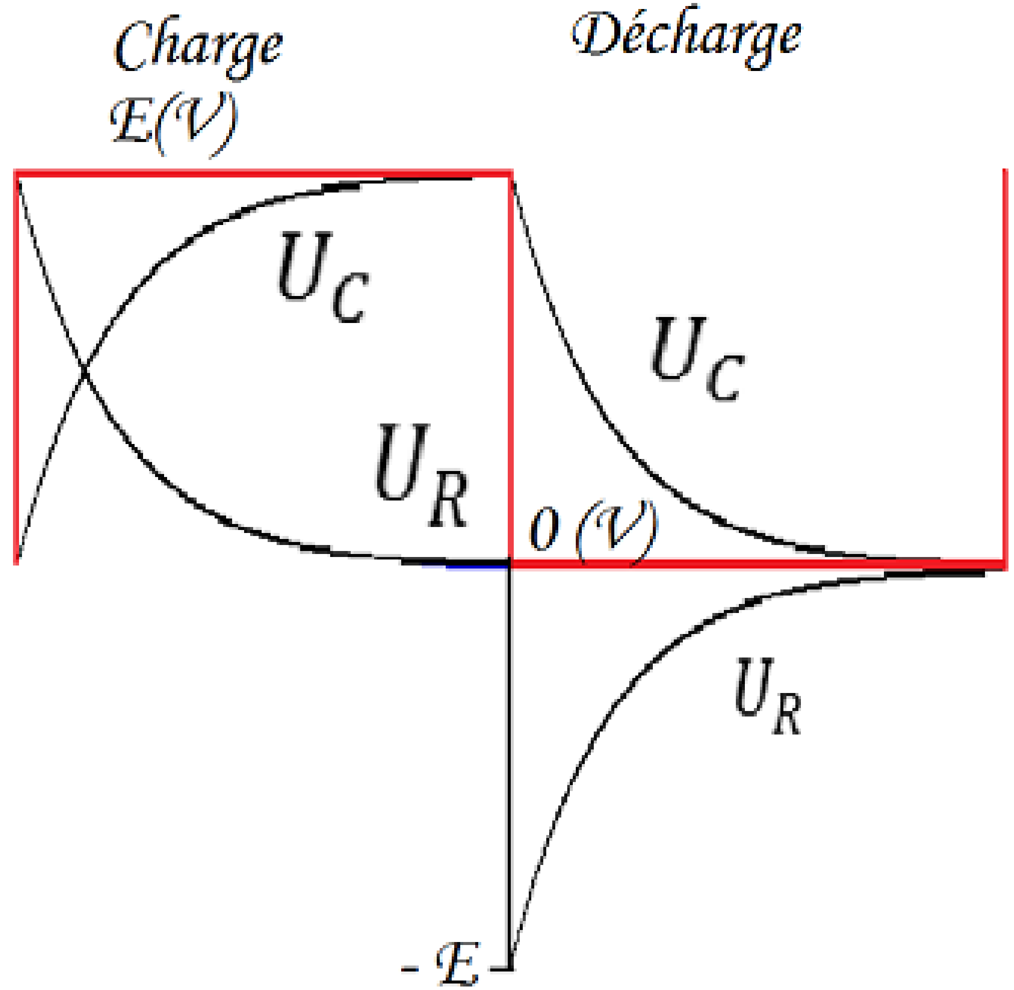
Avec : $i = C\frac{dU_C}{dt}$, *donc :*

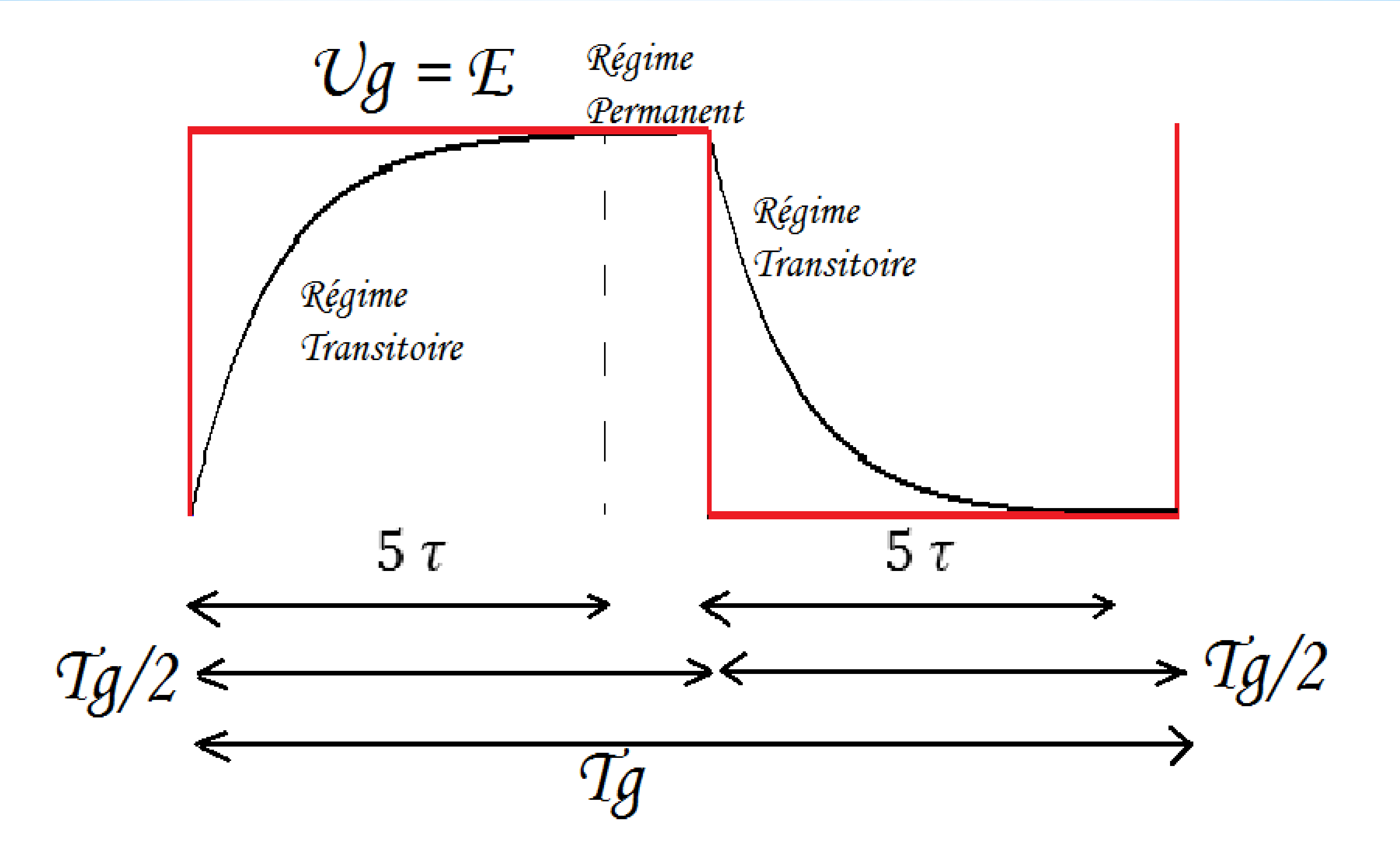
$$U_g = RC\frac{dU_C}{dt} + U_C$$

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R\,C} = \frac{U_g}{R\,C}$$

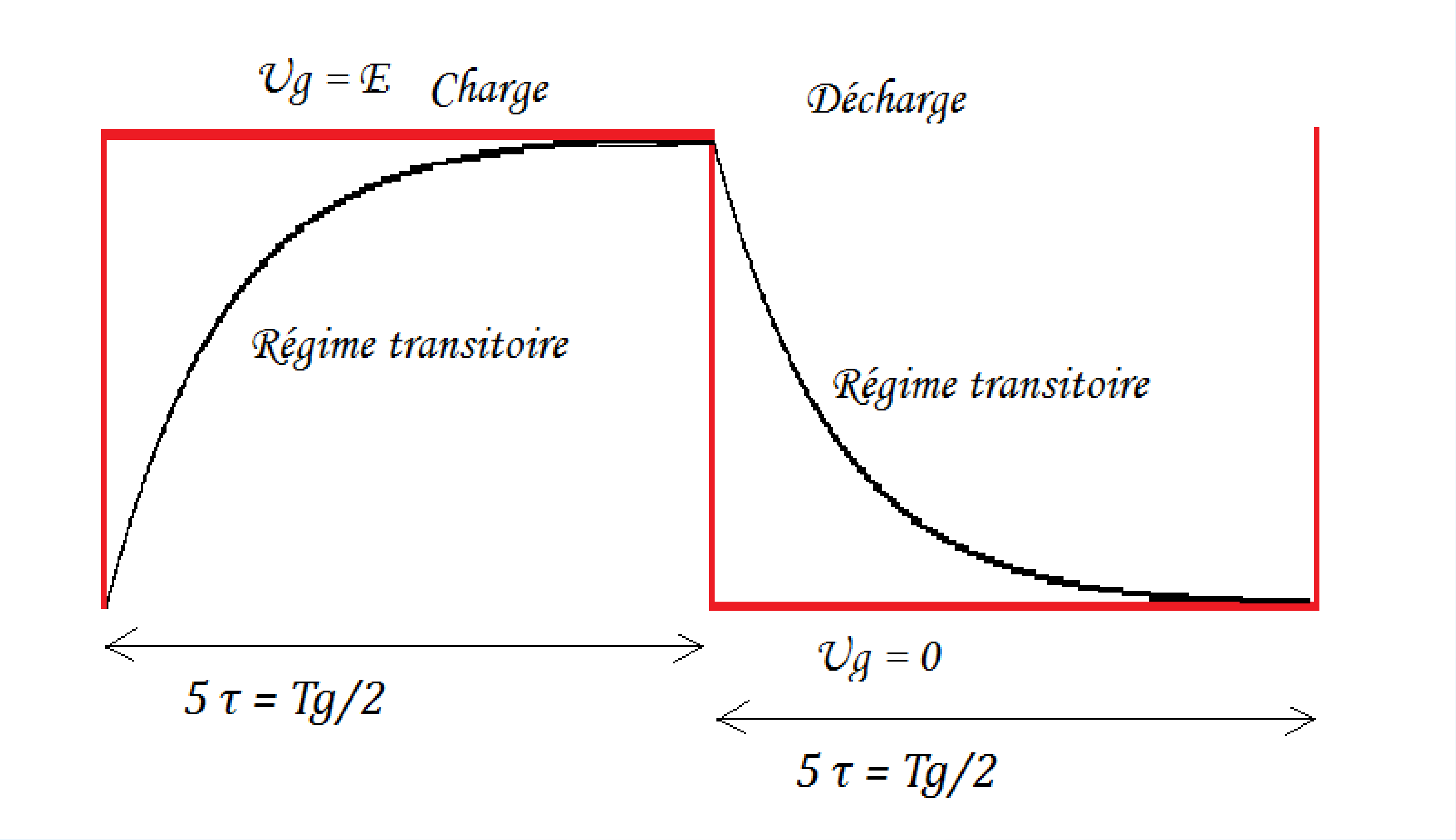


- ✓ <u>Charge :</u> $U_g = E \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R\,C} = \frac{E}{R\,C}$
- ✓ <u>Décharge :</u> $U_g = 0 \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R\,C} = 0$

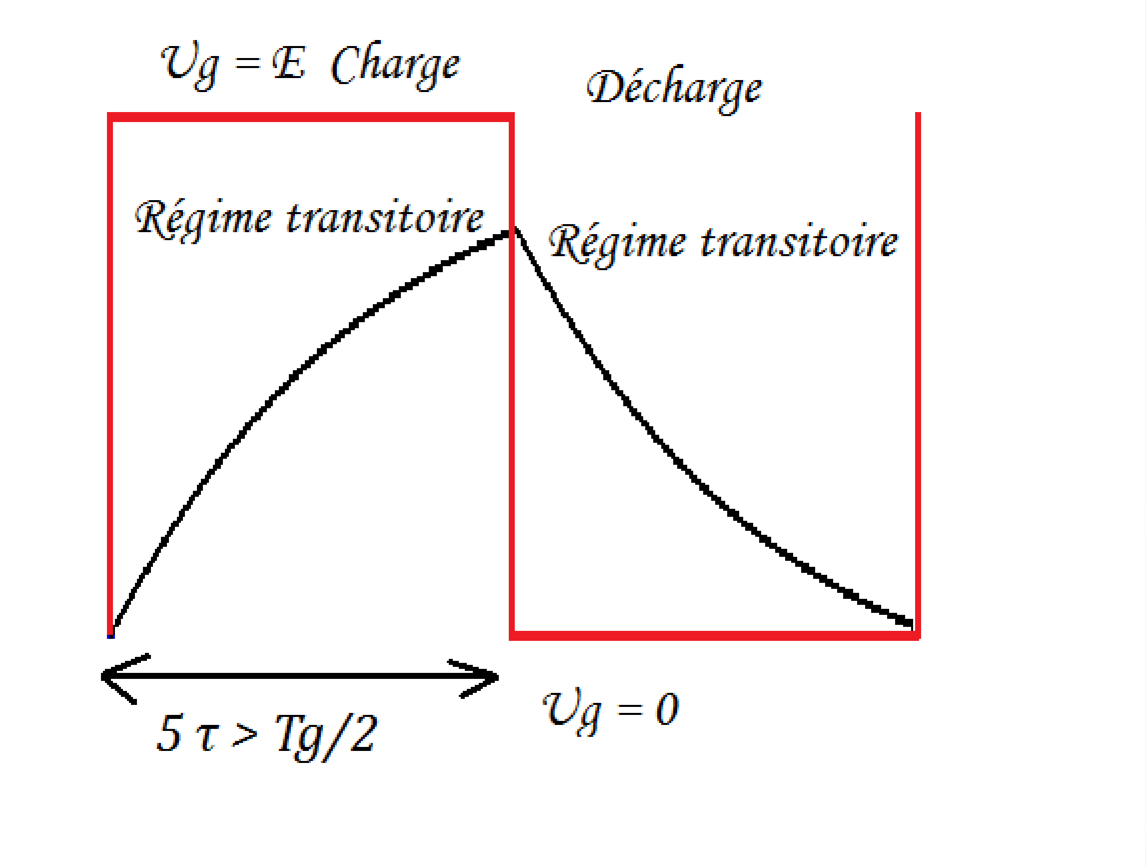

Charge
Décharge
E(V)
U_C
U_C
U_R
0 (V)
U_R
- E



- Si $\frac{T_g}{2} > 5\tau$, *dans ce , on observe les deux régimes transitoires et permanant , le condensateur est complétement chargé .*



- *Si* $\frac{T_g}{2} = 5\tau$ *le régime transitoire existe , le condensateur est complétement chargé , le régime permanent n'existe pas .*



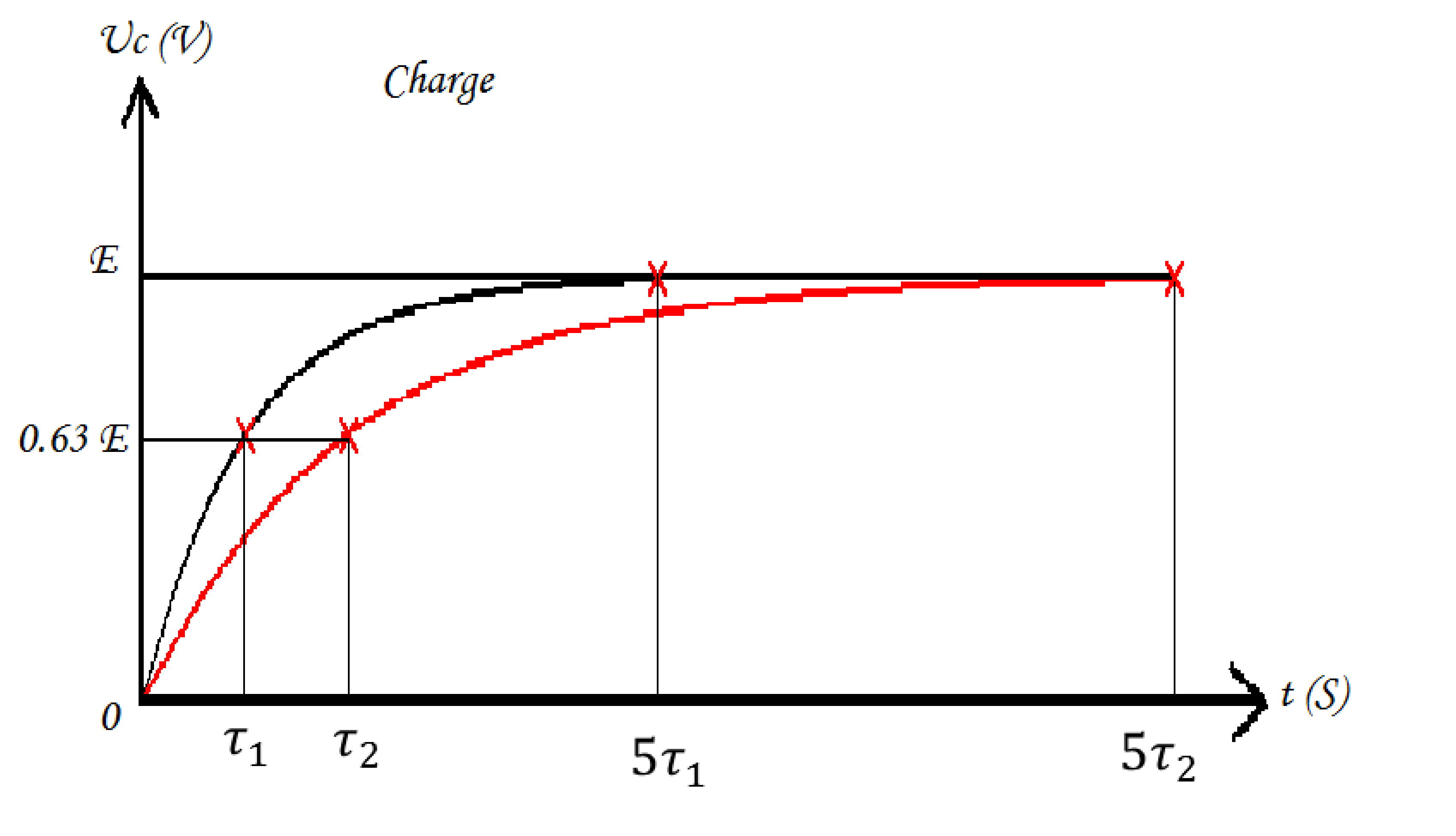
- Si $\frac{T_g}{2} < 5\tau$, *dans ce cas le régime transitoire existe , le régime permanent n'existe pas , le condensateur n'est pas complétement chargé .*

Variation de τ :

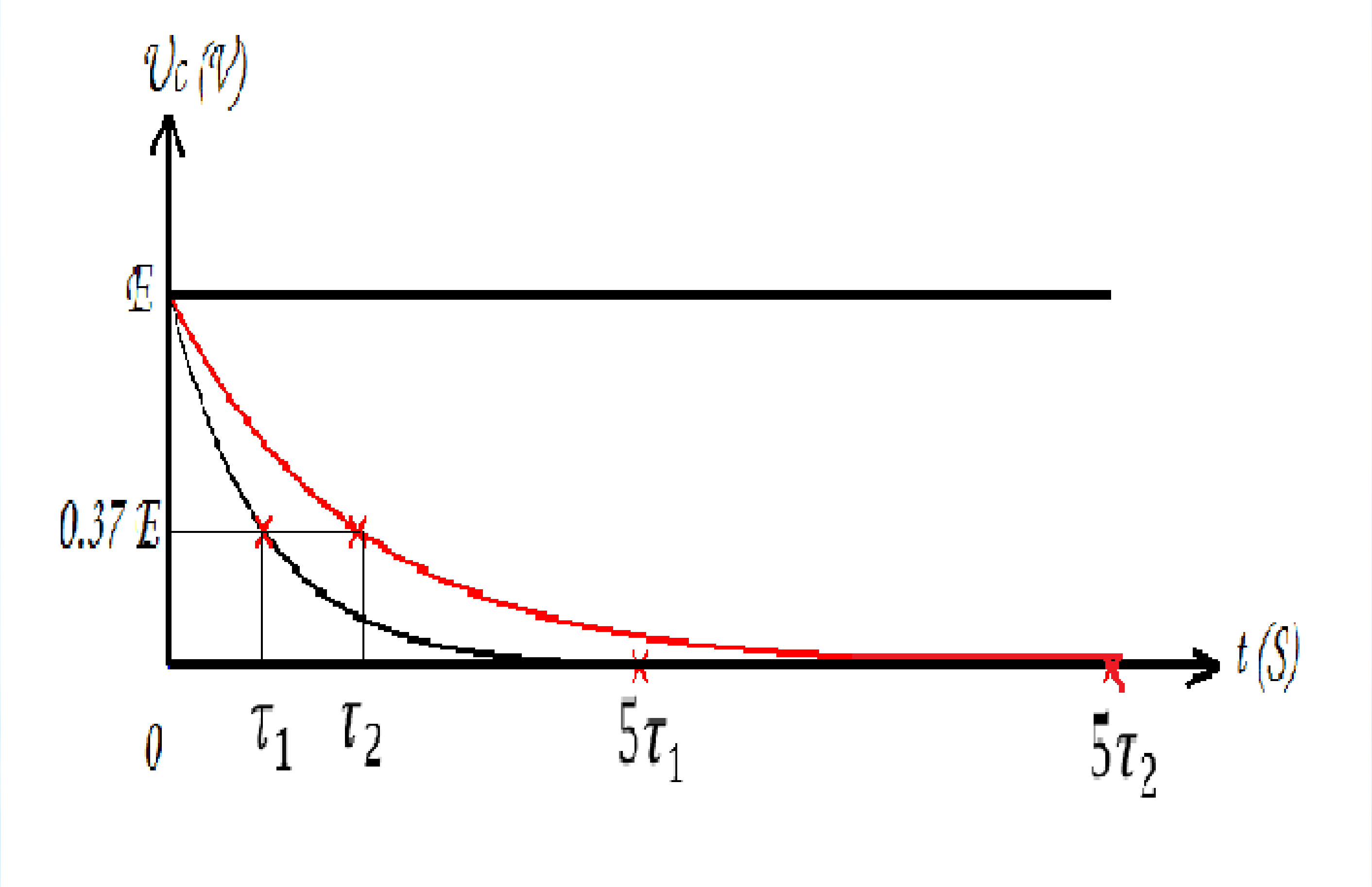
$$\tau = R\,C$$

$$\tau \uparrow, si\ R \uparrow ou\ C \uparrow$$
$$\tau \downarrow, si\ R \downarrow ou\ C \downarrow$$

$$\tau_1 < \tau_2 \Rightarrow R_1C_1 < R_2C_2 \Rightarrow 5\tau_1 < 5\tau_2$$



Uc (V)
Charge
E
0.63 E
0
τ1
τ2
5τ1
5τ2
t (S)



Vc (V)
E
0.37 E
t (S)
0
τ_1
τ_2
$5\tau_1$
$5\tau_2$